Lineær Algebra Beviser

Michael Lind Mortensen, 20071202, DAT4

12. august 2008

Thr. Theorem 1.2.1

Et $m \times n$ homogent system af lineære ligninger har en ikke-triviel løsning hvis $n > m$.

Thr. Theorem 5.3.1

Lad $S \subset \mathbb{R}^m$ og $b \in \mathbb{R}^m$. Da er projektionen p af b på S det nærmeste punkt på b i S. Altså:

$$||b - y|| > ||b - p|| \forall y \neq p \in S$$

Projektionen $p \in S$ vil dog kun være tættest på $b \in \mathbb{R}^m$ hvis $b-p \in S^{\perp}$.

Thr. Theorem 3.3.1

Lad $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ være vektorer i R^n og lad $\underline{\underline{X}} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n})$. Så gælder der, at vektorerne $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ vil være lineært afhængige hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær.

Thr. Theorem 3.4.1

Hvis $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ er et spanning set for V, så er ethvert sæt af $m > n$ vektorer lineært afhængige.

Thr. Theorem 3.4.3

Lad V være et vektorrum af $dim(V) = n > 0$. Ethvert spanning set der indeholder $m > n$ vektorer kan transformeres til en basis for V.

Thr. Korollar 3.4.2
Hvis $\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_n}\}$ og $\{\underline{u_1}, ..., \underline{u_m}\}$ begge er basiser for et vektorrum V, så er $n = m$.

Thr. Theorem 4.1.1
Hvis $L : V \rightarrow W$ er en lineær transformation og S er et underrum af V, så gælder der:

(i) $ker(L)$ er et underrum af V.
(ii) $L(S)$ er et underrum af W.

Thr. Theorem 4.2.1
Hvis L er en lineær transformation der afbilder R^n ind i R^m, så eksisterer der en $m \times n$ matrix A således at:

$$L(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\underline{x}$$

for enhver $x \in R^n$. Faktisk er den j'te søjlevektor af A givet ved:

$$\underline{a}_j = L(\underline{e}_j) \quad \text{for } j = 1, 2, ..., n$$

Thr. Theorem 2.1.2 $(det(A) = det(A^T))$
Hvis A er en $n \times n$ matrix, så er $det(A^T) = det(A)$.

Thr. Theorem 2.2.2
En $n \times n$ matrix A er singulær hvis og kun hvis:

$$det(A) = 0$$

Thr. Theorem 2.3.1

(Cramers regel) Lad A være en $n \times n$ nonsingular matrix og lad $b \in R^n$. Lad desuden A_i være en matrix skabt ved at "bytte" den i'te søjle af A ud med b. Hvis x er en unik løsning til $Ax = b$, så gælder der:

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

For $i = 1, 2, ..., n$.

Thr. Theorem 6.1.1

Lad A og B være $n \times n$ matricer. Hvis B er similar til A, så har de to matricer samme karakteristiske polynomium og derved også samme egenværdier.

Thr. Theorem 6.3.2

En $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar hvis og kun hvis den har n lineært uafhængige egenvektorer.

Thr. Theorem 5.4.1

(Pythagoras) Hvis u og v er ortogonale vektorer i et indre produktrum V, så gælder der:

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Thr. Theorem 5.4.2

Hvis u og v er tilfældige vektorer i et indre produktrum V, så gælder der:

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

Hvor lighed finder sted hvis og kun hvis u og v er lineært afhængige.

Thr. Theorem 5.2.4

Hvis S er et underrum af R^n, så er $(S^\perp)^\perp = S$.

Thr. Korollar 5.5.9

Lad S være et ikke-nul underrum af $\mathbb{R}^m$ og lad $b \in \mathbb{R}^m$. Hvis $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ er en ortonormal basis for S og $U = (u_1, u_2, ..., u_k)$, så er projektionen p af b på S givet ved:

$$p = UU^T b$$

Bevis. Bevis for unikhed

Hvis $\underline{\underline{P}}$ er en projektionsmatrice tilhørende et underrum S af R^m, så er projektionen $\underline{p}$ af $\underline{b}$ på S unik.
Hvis $\underline{\underline{Q}}$ også er en projektionsmatrice tilhørende S, så er:

$$\underline{\underline{Q}}\underline{b} = \underline{p} = \underline{\underline{P}}\underline{b}$$

Det følger heraf at:

$$\underline{q}_j = \underline{\underline{Q}}\underline{e}_j = \underline{\underline{P}}\underline{e}_j \underline{p}_j$$

$\square$

Thr. Theorem 5.5.1

Hvis $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ er et ortogonalt set af ikke-nul vektorer i et indre produktrum V, så er $v_1, v_2, ..., v_n$ lineært uafhængige.

Thr. Theorem 5.5.2

Lad $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ være en ortonormal basis for et indre produktrum V. Hvis der så gælder:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

Så er $c_i = \langle v, u_i \rangle$.

Thr. Theorem 5.5.5

En $n \times n$ matrix $\underline{\underline{Q}}$ er en ortogonalmatrix hvis og kun hvis $\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$

Thr. Schurs theorem

For enhver $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$, eksisterer der en unitær $n \times n$ matrix $\underline{\underline{U}}$, således at $\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{AU}}$ er øvre triangulær

Thr. Spektralsætningen

Hvis A er hermitisk, så eksisterer der en unitær matrix U der diagonaliserer A.

Thr. Theorem 6.6.1

Principal Axis Theorem Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en symmetrisk $n \times n$ matrix, så kan man skifte varible:

$$\underline{u} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{x}$$

Således at:

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{u}^T \underline{\underline{D}}\underline{u}$$

Hvor $\underline{\underline{D}}$ er en diagonal matrix.

Thr. Theorem 6.6.2

Lad A være en symmetrisk $n \times n$ matrix. Så er A positiv definit hvis og kun hvis alle dens egenværdier er positive.

Def. Løsningsform

For $n = 1$ kender vi løsningen som:

$$y' = ay \Rightarrow y(t) = ce^{at}$$

Indfører vi i stedet for generel løsning for $n > 1$, så får vi:

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ x_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} x$$

Def. Lineærkombination er også en løsning

Hvis Y_1 og Y_2 begge er løsninger til $Y' = AY$, så er lineærkombinationen af disse også en løsning.

Thr. Theorem 6.3.3

Hvis en Markov kæde med en $n \times n$ transitionsmatrix A konvergerer mod en steady-state vektor x, så gælder der:

(i) x er en sandsynlighedsvektor

(ii) $\lambda_1 = 1$ er en egenværdi til A og x er en egenvektor tilhørende λ_1.

Thr. Theorem 6.3.4

Hvis $\lambda_1 = 1$ er en dominant egenværdi af en stokastisk matrice A, så vil Markovkæden med transitionsmatrix A konvergerer mod en steady-state vektor.