Lineær Algebra Dispositioner

Michael Lind Mortensen, 20071202, DAT4

12. august 2008

Indhold

1 Løsning og mindste kvadraters løsninger af lineære ligningssystemer

1.1 Disposition

1. Lineær ligningssystem
2. ERO'er
3. Rækkeækvivalens
4. REF/RREF
5. Theorem 1.2.1
6. Mindste Kvadret
7. Theorem 5.3.1

1.2 Udspecificering

Def. Lineære ligningssystemer
Et lineært ligningssystem er et system af m ligninger i n ubekendte, hvor disse kan skrives som:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &.... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Disse systemer kan så også skrives på matrix form således:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Hvor løsningsmængden for systemet er de $\underline{x}$ for hvilket systemet er konsistent. Hvis systemet ingen løsning har er løsningsmængden tom - det siges derfor systemet er inkonsistent. Hvis løsningsmængden indeholder en eller flere løsninger, så siges systemet at være konsistent.

Def. Elementere rækkeoperationer (ERO)
Vi kan udføre rækkeoperationer på rækkerne i disse linæere ligningssystemer:

I: Ombytning Bytte om på to rækker

II: Skalering Gange med en skalar ($a \neq 0$)

III: Addition Lægge en række til en anden

Ingen af disse ændrer løsningsmængden.

Def. Rækkeækvivalens

To ligningssystemer er rækkeækvivalente såfremt de har samme løsningsmængde for samme sæt af variabler.

$$(\underline{\underline{A}}|\underline{b}) \sim (\underline{\underline{H}}|\underline{c})$$

$\underline{x}$ er derved løsningen til begge matricer (såfremt et sådant x eksisterer).

Def. Rækkeechelon (REF)

For en matrix på REF gælder:

1. Første ikke-nul element i hver række er 1
2. Hver række har flere foranstillede nuller end den foregående
3. Alle nul-rækker er nederst

1'erne fra regel-1 kaldes Pivot'er. Processen, der fører en matrix A på REF kaldes Gauss-elimination.

Def. Reduceret REF

For en matrix på RREF gælder:

1. Er på REF
2. Hver pivot er eneste ikke-nul element i søjlen.

Thr. Theorem 1.2.1

Et $m \times n$ homogent system af lineære ligninger har en ikke-triviel løsning hvis $n > m$.

Bevis. Theorem 1.2.1

Et homogent system er altid konsistent. REF formen af matricen har højst m ikke-nul rækker. Derved er der også maksimalt m pivoter. Siden der er n variabler i det hele og $n > m$, så må der være en eller flere frie variabler. De frie variabler kan derfor bliver givet arbitrære værdier og for enhver værdi af de frie variabler er der en løsning til systemet.

□

Def. Mindste kvadraters

Mindste kvadrater er en metode vi bruger til at lave et best fit af en given mængde data, således at man kan strukturerer disse som eksempelvis en ret linje eller noget tilsvarende.
Givet et $m \times n$ lineært ligningssystem $Ax = b$ med $m > n$ (Overdetermineret), så kan vi ikke generelt forvente at finde et $x \in \mathbb{R}^n$ for hvilket Ax giver b. Derfor, hvis $b \in \mathbb{R}^m$, så for ethvert $x \in \mathbb{R}^n$ kan vi forme et residual:

$$r(x) = b - Ax$$

Distancen mellem b og Ax er givet ved:

$$||b - Ax|| = ||r(x)||$$

Hvor vi ønsker at finde en vektor $x \in \mathbb{R}^n$ for hvilket $||r(x)||$ vil være minimal. En vektor $\hat{x}$ der gør dette siges at være en mindste kvadraters løsning til systemet $Ax = b$.
Hvis $\hat{x}$ er en mindste kvadraters løsning til systemet $Ax = b$ og $p = A\hat{x}$, så er p den vektor i søjlerummet for A der er tættest på b. Det følgende theorem garanterer at en sådan tætteste vektor p ikke blot eksisterer, men er unik:

Thr. Theorem 5.3.1

Lad $S \subset \mathbb{R}^m$ og $b \in \mathbb{R}^m$. Da er projektionen p af b på S det nærmeste punkt på b i S. Altså:

$$||b - y|| > ||b - p|| \forall y \neq p \in S$$

Projektionen $p \in S$ vil dog kun være tættest på $b \in \mathbb{R}^m$ hvis $b - p \in S^{\perp}$.

Bevis. Theorem 5.3.1

Vi ved at $\mathbb{R}^m = S \oplus S^{\perp}$ og således kan enhver $b \in \mathbb{R}^m$ skrives unikt som summen:

$$b = p + z$$

hvor $p \in S$ og $z \in S^{\perp}$. Hvis y er ethvert andet element af S, så gælder der:

$$||b - y||^2 = ||(b - p) + (p - y)||^2$$

Siden $p - y \in S$ og $b - p = z \in S^{\perp}$, så følger det af Pythagoras' lov, at:

$$||b - y||^2 = ||b - p||^2 + ||p - y||^2$$

Derved får vi

$$||b - y|| > ||b - p||$$

Altså, så hvis $p \in S$ og $b - p \in S^{\perp}$, så er p elementet i S der er tættest på b.
Alternativt hvis $q \in S$ og $b - q \notin S^{\perp}$, så er $p \neq q$ og:

$$||b - p|| > ||b - q||$$

$\square$

2 Vektorrum og underrum

2.1 Disposition

1. Vektorrum
2. Underrum
3. Spanning set
4. Basis
5. Theorem 3.3.1
6. Theorem 3.4.1
7. Theorem 3.4.3

2.2 Udspecificering

Def. Vektorrum

V er en mængde af vektorer, hvor addition og skalarmultiplikation er defineret. Der gælder følgende axiomer:

1. Vektoraddition er associativ
   $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V\colon \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$
2. Vektoraddition er kommutativ
   $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V\colon \underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
3. Vektoraddition har en additionsidentitet
   Nullvektoren $\underline{0}$ der giver os: $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$
4. Vektoraddition har additive inverser
   $\forall \underline{v} \in V\colon \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
5. Skalarmultiplikation er disbributiv
   $\forall a \in \mathbb{F} \wedge \underline{v}, \underline{w} \in V\colon a(\underline{v} + \underline{w}) = a\underline{v} + a\underline{w}$
   $\forall a, b \in \mathbb{F} \wedge \underline{v} \in V\colon (a + b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v}$
6. Skalarmultiplikation er kompatibel med multiplikation i legemet af skalarer
   $\forall a, b \in \mathbb{F} \wedge \underline{v} \in V\colon a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v}$
7. Skalarmultiplikation har et identitetselement
   $\forall \underline{v} \in V\colon 1\underline{v} = \underline{v}$ (Hvor 1 kaldes den multiplikative identitet i $\mathbb{F}$)

Def. Elementære egenskaber ved vektorrum

Lad V være et vektorrum, så gælder følgende egenskaber:

1. Nulvektoren $\underline{0} \in V$ er unik

   Hvis 0_1 og 0_2 var nulvektorer, så galdte der: $\underline{0_2} + \underline{v} = \underline{v}$ og $\underline{0_1} + \underline{v} = \underline{v}$ og derved $\underline{0_1} = \underline{0_2} = \underline{0}$.

2. Skalarmultiplikation med 0 giver nulvektoren $\underline{0}$.

   $\forall \underline{v} \in V$: $0\underline{v} = 0$ (hvor 0 er den additionsidentiteten)

3. Skalarmultiplikation med nulvektoren giver altid nulvektoren

   $\forall a \in \mathbb{F}$: $a\underline{0} = \underline{0}$ (hvor $\underline{0}$ er nulvektoren)

4. Ingen andre skalarmultiplikationer giver nulvektoren

   Vi har $a\underline{v} = \underline{0}$ hvis og kun hvis $a = 0$ eller $\underline{v} = \underline{0}$ - altså ingen andre skalarmultiplikationer kan give nulvektoren.

5. Den additive invers $-\underline{v}$ af en vektor $\underline{v}$ er unik

   Hvis $\underline{w_1}$ og $\underline{w_2}$ er additive inverser af $\underline{v} \in V$, så er $\underline{v} + \underline{w_1} = \underline{0}$ og $\underline{v} + \underline{w_2} = \underline{0}$ så derved er $\underline{w_1} = \underline{w_2} = -\underline{v}$

6. Skalarmultiplikation med -1 giver den additive invers af vektoren

   $\forall \underline{v} \in V : -1\underline{v} = \underline{v}$ hvor 1 er den multiplikative identitet i $\mathbb{F}$

7. Negering flyttes frit

   $\forall a \in \mathbb{F} \wedge \underline{v} \in V : (-a)\underline{v} = a(-\underline{v}) = -(a\underline{v})$

Def. Underrum

Lad $S \subseteq V$ hvor S er et underrum af V, såfremt det er lukket under addition og skalarmultiplikation:

1. Hvis $\underline{u}, \underline{v} \in S$, så gælder der: $\underline{u} + \underline{v} \in S$
2. Hvis $a \in \mathbb{F} \wedge \underline{v} \in S$, så gælder der: $a\underline{v} \in S$

Def. Spanning set

Sættet $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er et spanning set for V hvis enhver $\underline{x} \in V$ kan skrives som en lineær kombination af vektorerne i spanning sættet.

Def. Basis

Sættet $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er en basis for V hvis disse er indbyrdes lineært uafhængige og spanner V.

Def. Lineær uafhængighed

Et sæt $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at $c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + ... + c_3\underline{v_n} = 0$ kun har den trivielle løsning hvor $c = 0$ for alle c. Hvis der derimod eksisterer et $c \neq 0$, så er vektorerne i stedet lineært afhængige, da en kan skrives som en linear kombination af de andre.

Thr. Theorem 3.3.1

Lad $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ være vektorer i R^n og lad $\underline{\underline{X}} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n})$. Så gælder

der, at vektorerne $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ vil være lineært afhængige hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær.

Bevis. Theorem 3.3.1
Vi har en ligning:

$$c_1\underline{x_1} + c_2\underline{x_2} + ... + c_n\underline{x_n} = 0$$

som kan blive omskreven til en matrice:

$$\underline{\underline{X}}\,\underline{c} = \underline{0}$$

Denne ligning vil så have en ikke-triviel løsning hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær. Dette skyldes, at hvis X ikke er singulær, så kan man gange X^{-1} på begge sider hvorved man får $X^{-1}Xc = 0X^{-1}$ som så bliver $c = 0$, såfremt X ikke er singulær. Altså vil $\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}$ være lineært afhængige hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær. □

Thr. Theorem 3.4.1
Hvis $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ er et spanning set for V, så er ethvert sæt af $m > n$ vektorer lineært afhængige.

Bevis. Theorem 3.4.1
Lad $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m$ være et sæt af vektorer i V, hvor $m > n$. Så siden $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ spanner V, så har vi:

$$\underline{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{v}_j$$

Hvor en lineær kombination af disse u'er kan skrives som:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\underline{u}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(c_i\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{v}_j\right]\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i\right)\underline{v}_j$$

Hvis vi så ser på følgende ligningssystem, taget fra det ovenstående:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, ..., n$$

Så ses her at der er færre ligninger end ubekendte, så dette betegner altså et homogent ligningssystem med flere ubekendte end ligninger

og ifølge theorem 1.2.1 betyder dette at der må være en ikke-triviel løsning $\{c'_1, ..., c'_m\}^T$ hvor nogle af disse må være ulig 0.
Indsættes dette i udtrykket ovenfor, så får vi:

$$c'_1\underline{u_1} + c'_2\underline{u_2} + ... + c'_m\underline{u_m} = \sum_{j=1}^{n} 0\underline{v}_j = \underline{0}$$

Ifølge definitionen for lineær afhængighed må $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m$ derfor være lineær afhængig.

□

Thr. Theorem 3.4.3

Lad V være et vektorrum af $dim(V) = n > 0$. Ethvert spanning set der indeholder $m > n$ vektorer kan transformeres til en basis for V.

Bevis. Theorem 3.4.3

Sætning 3.4.1 giver os, at $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m$ er lineært afhængig. Derfor kan i hvert fald en vektor $\underline{u}_m$ skrives som en lineær kombination af de øvrige. Således kan $\underline{u}_m$ elimineres fra sættet og de øvrige $m - 1$ vektorer vil staidg være frembringere for V. Sålænge $m - 1 > n$ gentages dette og når $m \leq n$ vil $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_n$ være en basis for V.

□

3 Lineær uafhængighed

3.1 Disposition

1. Lineær uafhængighed
2. Spanning set
3. Basis
4. Theorem 3.3.1
5. Theorem 3.4.1

3.2 Udspecificering

Def. Lineær uafhængighed
Et sæt $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ af vektorer er lineært uafhængige såfremt der gælder at $c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + ... + c_3\underline{v_n} = 0$ kun har den trivielle løsning hvor $c = 0$ for alle c. Hvis der derimod eksisterer et $c \neq 0$, så er vektorerne i stedet lineært afhængige, da en kan skrives som en linear kombination af de andre.

Def. Spanning set
Sættet $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er et spanning set for vektorrummet V hvis enhver $\underline{x} \in V$ kan skrives som en lineær kombination af vektorerne i spanning sættet.

Def. Basis
Sættet $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er en basis for V hvis disse er indbyrdes lineært uafhængige og spanner V.

Thr. Theorem 3.3.1
Lad $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ være vektorer i R^n og lad $\underline{\underline{X}} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n})$. Så gælder der, at vektorerne $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ vil være lineært afhængige hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær.

Bevis. Theorem 3.3.1
Vi har en ligning:

$$c_1\underline{x_1} + c_2\underline{x_2} + ... + c_n\underline{x_n} = 0$$

som kan blive omskreven til en matrice:

$$\underline{\underline{X}}\ \underline{c} = \underline{0}$$

Denne ligning vil så have en ikke-triviel løsning hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær. Dette skyldes, at hvis X ikke er singulær, så kan man gange X^{-1} på begge sider hvorved man får $X^{-1}Xc = 0X^{-1}$ som så bliver $c = 0$, såfremt X ikke er singulær. Altså vil $\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}$ være lineært afhængige hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær. □

Thr. Theorem 3.4.1

Hvis $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ er et spanning set for V, så er ethvert sæt af $m > n$ vektorer lineært afhængige.

Bevis. Theorem 3.4.1

Lad $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m$ være et sæt af vektorer i V, hvor $m > n$. Så siden $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ spanner V, så har vi:

$$\underline{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{v}_j$$

Hvor en lineær kombination af disse u'er kan skrives som:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\underline{u}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(c_i\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{v}_j\right]\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i\right)\underline{v}_j$$

Hvis vi så ser på følgende ligningssystem, taget fra det ovenstående:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, ..., n$$

Så ses her at der er færre ligninger end ubekendte, så dette betegner altså et homogent ligningssystem med flere ubekendte end ligninger og ifølge theorem 1.2.1 betyder dette at der må være en ikke-triviel løsning $\{c_1', ..., c_m'\}^T$ hvor nogle af disse må være ulig 0.
Indsættes dette i udtrykket ovenfor, så får vi:

$$c_1'\underline{u_1} + c_2'\underline{u_2} + ... + c_m'\underline{u_m} = \sum_{j=1}^{n} 0\underline{v}_j = \underline{0}$$

Ifølge definitionen for lineær afhængighed må $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m$ derfor være lineær afhængig.

□

4 Basis for vektorrum; koordinatisering

4.1 Disposition

1. Ordnet basis
2. Theorem 3.3.1
3. Theorem 3.4.1
4. Korollar 3.4.2
5. Koordinatvektor

4.2 Udspecificering

Def. Ordnet basis

Sættet $\{\underline{b_1}, \underline{b_2}, ..., \underline{b_n}\}$ er en basis for V hvis disse er indbyrdes lineært uafhængige.
Normalt er rækkefølgen hvorved vektorer fremgår i en basis irrelevant, men i visse tilfælde kan det være nødvendigt at have dem ordnet: $[b_1, b_2, ...b_n]$. (Hvilket det bl.a. er for koordinatisering).

Thr. Theorem 3.3.1

Lad $\underline{x_1}, \underline{x_2}, ..., \underline{x_n}$ være vektorer i R^n og lad $\underline{\underline{X}} = (\underline{x_1}, ..., \underline{x_n})$. Så gælder der, at vektorerne $\underline{x_1}, \underline{x_2}, ..., \underline{x_n}$ vil være lineært afhængige hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær.

Bevis. Theorem 3.3.1

Vi har en ligning:

$$c_1\underline{x_1} + c_2\underline{x_2} + ... + c_n\underline{x_n} = 0$$

som kan blive omskreven til en matrice:

$$\underline{\underline{X}}\ \underline{c} = \underline{0}$$

Denne ligning vil så have en ikke-triviel løsning hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær. Dette skyldes, at hvis X ikke er singulær, så kan man gange X^{-1} på begge sider hvorved man får $X^{-1}Xc = 0X^{-1}$ som så bliver $c = 0$, såfremt X ikke er singulær. Altså vil $\underline{x_1}, ..., \underline{x_n}$ være lineært afhængige hvis og kun hvis $\underline{\underline{X}}$ er singulær. $\square$

Thr. Theorem 3.4.1

Hvis $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er et spanning set for V, så er ethvert sæt af $m > n$ vektorer lineært afhængige.

Bevis. Theorem 3.4.1

Lad $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m$ være et sæt af vektorer i V, hvor $m > n$. Så siden $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ spanner V, så har vi:

$$\underline{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underline{v}_j$$

Hvor en lineær kombination af disse u'er kan skrives som:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \underline{u}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(c_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underline{v}_j \right] \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \right) \underline{v}_j$$

Hvis vi så ser på følgende ligningssystem, taget fra det ovenstående:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, ..., n$$

Så ses her at der er færre ligninger end ubekendte, så dette betegner altså et homogent ligningssystem med flere ubekendte end ligninger og ifølge theorem 1.2.1 betyder dette at der må være en ikke-triviel løsning $\{c'_1, ..., c'_m\}^T$ hvor nogle af disse må være ulig 0.
Indsættes dette i udtrykket ovenfor, så får vi:

$$c'_1 \underline{u_1} + c'_2 \underline{u_2} + ... + c'_m \underline{u_m} = \sum_{j=1}^{n} 0 \underline{v}_j = \underline{0}$$

Ifølge definitionen for lineær afhængighed må $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_m$ derfor være lineær afhængig.

$\square$

Thr. Korollar 3.4.2

Hvis $\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_n}\}$ og $\{\underline{u_1}, ..., \underline{u_m}\}$ begge er basiser for et vektorrum V, så er $n = m$.

Bevis. Korollar 3.4.2

Lad $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ og $\underline{u_1}, \underline{u_2}, ..., \underline{u_m}$ begge være basiser for V. Siden $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ spanner V og $\underline{u_1}, \underline{u_2}, ..., \underline{u_m}$ er linæert uafhængige, så følger det af Theorem 3.4.1 at $m \leq n$. Ved samme logik, så da $\underline{u_1}, \underline{u_2}, ..., \underline{u_m}$ spanner V og $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ er lineært uafhængige, så siger Theorem 3.4.1 at $n \leq m$ - altså må $n = m$. $\square$

Def. Koordinatvektor

Lad V være et vektorrum og lad $E = [\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}]$ være en ordnet basis for V. Hvis v er et givent element af V, så kan $\underline{v}$ skrives på formen:

$$\underline{v} = c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + ... + c_n\underline{v_n}$$

hvor $c_1, c_2, ..., c_n$ er skalarer. Nu kan vi så associere enhver vektor $\underline{v}$ med en unik vektor $\underline{c} = (c_1, c_2, ...c_n)^T$ i R^n. Denne vektor $\underline{c}$ kaldes koordinatvektoren for $\underline{v}$ ift. den ordnede basis E og skrives:

$$[\underline{v}]_E$$

c_i'erne kaldes så koordinaterne for $\underline{v}$ relativt til E.
Hvis et vektorrum V har $dim(n)$, så kan V koordinaseres så den "efterligner" R^n. Vi kan dermed arbejde med koordinatiseringen med samme værktøjer som ved rummet R^n.

5 Matricer og lineære transformationer

5.1 Disposition

1. Lineære transformationer
2. Kernel
3. Billede & Range
4. Theorem 4.1.1
5. Theorem 4.2.1

5.2 Udspecificering

Def. Lineær transformation
En afbilleding L fra et vektorrum V til W kaldes en lineær transformation hvis:

$$L(\alpha \underline{v_1} + \beta \underline{v_2}) = \alpha L(\underline{v_1}) + \beta L(\underline{v_2})$$

$\forall \underline{v_1}, \underline{v_2} \in V \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

En lineær transformation fra V til W skrives:

$$L : V \rightarrow W$$

Af definitionen for lineære transformationer følger desuden:

$$L(\underline{0_v}) = \underline{0_w}$$
$$L(\sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v_i}) = \sum_{i+1}^{n} a_i L(\underline{v_i})$$
$$L(-\underline{v}) = -L(\underline{v})$$

Def. Kernen
Kernen er alle de vektorer v for hvilket $L(v)$ giver nulvektoren. Eller skrevet mere matematisk:

Lad $L : V \rightarrow W$. Da er kernen af L:

$$ker(L) = \{\underline{v} \in V | L(\underline{v}) = \underline{0_w}\}$$

Def. Billedet/Range

Lad $L : V \to W$ være en lineær transformation and lad S være et underrum af V. Billedet af S, skrevet som $L(S)$, er defineret som:

$$L(S) = \{\underline{w} \in W | \underline{w} = L(\underline{v}) \text{ for nogle } \underline{v} \in S\}$$

Billedet af et komplet vektorrum, $L(V)$, kaldes for range af L.

Thr. Theorem 4.1.1

Hvis $L : V \to W$ er en lineær transformation og S er et underrum af V, så gælder der:

(i) $ker(L)$ er et underrum af V.

(ii) $L(S)$ er et underrum af W.

Bevis. Theorem 4.1.1

Det er trivielt at $ker(L)$ er ikke-tom, siden nulvektoren 0_v er i $ker(L)$. For at bevise (i) må vi bevise at $ker(L)$ er lukket under skalarmultiplikation og addition af vektorer. Hvis $v \in ker(L)$ og α er en skalar, så gælder der:

$$L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha 0_w = 0_w$$

Derfor gælder der, at $\alpha v \in ker(L)$. - Altså at $ker(L)$ er lukket under skalarmultiplikation.
Hvis $v_1, v_2 \in ker(L)$, så gælder der:

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w$$

Derfor gælder der, at $v_1 + v_2 \in ker(L)$ - ergo, $ker(L)$ er et underrum af V.

Beviset for (ii) minder om det foregående. $L(S)$ er ikke-tom da $0_w = L(0_v) \in L(S)$. Hvis $w \in L(S)$, så er $w = L(v)$ for nogle $v \in S$. For ethvert skalar α gælder der:

$$\alpha w = \alpha L(v) = L(\alpha v)$$

Siden $\alpha v \in S$, så følger det at $\alpha w \in L(S)$ - ergo er $L(S)$ lukket under skalarmultiplikation. Hvis $w_1, w_2 \in L(S)$, så eksisterer der vektorer

$v_1, v_2 \in S$ sådan at $L(v_1) = w_1$ og $L(v_2) = w_2$. Altså gælder der:

$$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2)$$

Ergo er $L(S)$ lukket under addition. $\square$

Thr. Theorem 4.2.1
Hvis L er en lineær transformation der afbilder R^n ind i R^m, så eksisterer der en $m \times n$ matrix A således at:

$$L(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}x$$

for enhver $x \in R^n$. Faktisk er den j'te søjlevektor af A givet ved:

$$\underline{a}_j = L(\underline{e}_j) \quad \text{for } j = 1, 2, ..., n$$

Bevis. Theorem 4.2.1
For $j = 1, ..., n$ defines:

$$\underline{a}_j = L(\underline{e}_j)$$

og matricen $\underline{\underline{A}}$ dannes ved:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n)$$

Hvis $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + ... + x_n\underline{e}_n$ er et arbitrært element af R^n, så gælder der:

$$\begin{aligned}
L(x) &= x_1 L(\underline{e}_1) + x_2 L(\underline{e}_2) + ... + x_n L(\underline{e}_n) \\
&= x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + ... + x_n\underline{a}_n \\
&= (\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \underline{\underline{A}}x
\end{aligned}$$

$\square$

6 Determinanter

6.1 Disposition

1. Determinant
2. Egenskaber ved determinanter
3. Theorem 2.1.2
4. Theorem 2.2.2
5. Theorem 2.3.1

6.2 Udspecificering

Def. Determinant

For enhver $n \times n$ matrix A er det muligt at associere en scalar $det(A)$, der bl.a. kan fortælle os om en matrice er singulær.
Determinanten for en $n \times n$ matrice A udregnes forskelligt for $n = 1$ og $n > 1$. For $n = 1$ er determinanten blot indgangen a_{11}, hvor for $n > 1$ er det:

$$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A1n$$

Hvor A_{ij}'erne kaldes cofacterne:

$$A_{ij} = (-1)^{1+j} det(M_{1j})$$

For $j = 1, ..., n$.

Matricen M_{ij} kaldes minor af A og er A uden den i'te række og j'te søjle. Her har vi valgt at udvikle efter første række, men vi kunne sagtens have valgt at udvikle efter en anden række eller søjle.
Udregning af determinanten skrives op således:

$$det(A) = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - fb$$

En matrice A er invertibel såfremt $det(A) \neq 0$.

Note. Egenskaber ved determinanter

Der gælder en række egenskaber for determinanter, som alle kan gøre det lettere at udregne determinanten for en given matrice. Disse er:

- For enhver $n \times n$ matrix A har vi $det(A) = det(A^T)$
- Hvis en matrice er triangulær kan determinanten findes ved blot at finde produktet af diagonalelementerne.
- Hvis to rækker af en $n \times n$ matrix byttes om, så bliver $det(A)$ til $-det(A)$.
- Hvor to rækker el. søjler af en $n \times n$ matrix er ens, så er $det(A) = 0$.
- Hvis en række ganges med en skalar r bliver determinanten $rdet(A)$
- Hvis et multiplum af en række bliver adderet til en anden række, så forbliver determinanten den samme.

Thr. Theorem 2.1.2 ($det(A) = det(A^T)$)
Hvis A er en $n \times n$ matrix, så er $det(A^T) = det(A)$.

Bevis. Theorem 2.1.2 Vi beviser vha. induktion. At basistilfældet gælder ses nemt, da vi her har en 1×1 matrix, som derfor nødvendigvis må være symmetrisk hvorved $det(A^T) = det(A)$.
Hvis vi som induktionshypotese så antager at resultatet også gælder for $k \times k$, så skal vi blot i vores induktionsskridt se på om det holder for $k + 1 \times k + 1$. Vi starter med at lave cofactor-expansion på første række af vores nye A:

$$det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) + -... \pm a_{1,k+1}det(M_{1,k+1})$$

Siden M_{ij}'erne må være $k \times k$ matricer, så følger det af induktionshypotesen at:

$$det(A) = a_{11}det(M_{11}^T) - a_{12}det(M_{12}^T) + -... \pm a_{1,k+1}det(M_{1,k+1}^T)$$

Som det ses er vores cofactor-expansion af første række af A nu blot lig med cofactor-expansion af første søjle af A^T. Derved må der gælde:

$$det(A^T) = det(A)$$

□

Thr. Theorem 2.2.2
En $n \times n$ matrix A er singulær hvis og kun hvis:

$$det(A) = 0$$

Bevis. Theorem 2.2.2

Matricen A kan blive reduceret til REF vha. et endeligt antal elementære rækkeoperationer. Altså:

$$U = E_k E_{k-1} ... E_1 A$$

hvor U er i REF og E_i'erne er elementærmatricer. Det ses så:

$$\begin{aligned} det(U) &= det(E_k E_{k-1} ... E_1 A) \\ &= det(E_k) det(E_{k-1}) ... det(E_1) det(A) \end{aligned}$$

Siden determinanterne af E_i'erne alle er ikke-nul, så følger det at $det(A) = 0$ hvis og kun hvis $det(U) = 0$. Hvis A er non-singular, så er U triangular med 1'er ned langs diagonalen og derved er $det(U) = 1$. Altså er A singular hvis og kun hvis $det(A) = 0$. □

Note. Adjungerede matrix

Lad A være en $n \times n$ matrix. Den adjungerede af A er således en matrice hvor hver indgang a_{ij} er erstattet med dets kofakter A_{ij} og matricen er transponeret.
Det følger så at:

$$A(adj(A)) = det(A)I$$

Og hvis A er nonsingulær kan det skrives om til:

$$I = A(\frac{1}{det(A)} adj(A)) \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

Thr. Theorem 2.3.1

(Cramers regel) Lad A være en $n \times n$ nonsingular matrix og lad $b \in R^n$. Lad desuden A_i være en matrix skabt ved at "bytte" den i'te søjle af A ud med b. Hvis x er en unik løsning til $Ax = b$, så gælder der:

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

For $i = 1, 2, ..., n$.

Bevis. Theorem 2.3.1

Vi starter med at observere vi kan skrive x om til:

$$x = A^{-1} b = \frac{1}{det(A)} (adj A) b$$

Hvor $adjA$ er en adjoint matrix af A, hvilket vil sige alle indgange er udskiftet med deres cofactor og matrixen er blevet transponeret.
Ud fra ovenstående kan så ses at følgende må gælde:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + ... + b_n A_{ni}}{det(A)} \\ &= \frac{det(A_i)}{det(A)} \end{aligned}$$

Derved er sætningen bevist.

Eks. Cramers regel 2×2 matrix
Vi antager vi har følgende lineære ligningssystem:

$$ax + by = ecx + dy = f$$

Som på matrixform kan skrives:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Så kan x og y findes vha. Cramers regel. Dette bliver så:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

Og....

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

7 Egenværdier og egenvektorer

7.1 Disposition

1. Egenværdi og egenvektor
2. Egenrum
3. Det karakteristiske polynomium
4. Similaritet
5. Theorem 6.1.1
6. Diagonalisering
7. Theorem 6.3.2

7.2 Udspecificering

Def. Egenværdi og egenvektor

Lad $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$. En skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi *(også kaldet karakteristisk værdi)* for matricen $\underline{\underline{A}}$ hvis den opfylder:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

Hvor vektoren $\underline{x}$ kaldes egenvektoren tilhørende egenværdien λ og egenvektoren ikke er nulvektoren $\underline{0}$

En egenværdi har adskillige tilknyttede egenvektorer, men en egenvektor har altid kun en egenværdi. En egenvektor gange en skalar er f.eks. stadig en egenvektor til samme egenværdi.
Komplekse egenværdier opstår altid i konjugerede par, således at hvis $\lambda = a + bi$ er en egenværdi for A, så er den konjugerede af λ ligeledes en egenværdi for A.

Def. Egenrummet

Ved omskrivning af definitionen ovenfor får vi:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{x} = \underline{0}$$

Løsningsrummet $N(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$ er da egenrummet for matricen $\underline{\underline{A}}$. Egenrummet består af alle egenvektorer til en given egenværdi.

Def. Det karakteristiske polynomium

Vi kan udregne egenværdierne for matricen A vha. determinanten for $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$. Altså:

$$det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})) = p(\lambda) = 0$$

Røderne til dette karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ er så egenværdierne.

Def. Geometrisk og Algebraisk multiplicitet

$Geo(\lambda)$ er dimensionen af egenrummet $N(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$
$Alg(\lambda)$ er antal gange en given egenværdi optræder.

Geometrisk og algebraisk multiplicitet er især nyttigt ved diagonalisering, da en matrice A er diagonaliserbar hvis og kun hvis den algebraisk multiplicitet for hver mulig egenværdi er lig med den geometriske multiplicitet.

Def. Similaritet

To $n \times n$ matricer B og A siges at være similarer hvis der eksisterer en nonsingular matrix S således at $B = S^{-1}AS$.
Similaritet betyder bl.a. at similare matricer har samme rank, determinant, karakteristiske polynomium mm.

Thr. Theorem 6.1.1

Lad A og B være $n \times n$ matricer. Hvis B er similar til A, så har de to matricer samme karakteristiske polynomium og derved også samme egenværdier.

Bevis. Theorem 6.1.1

Lad $p_A(x)$ og $p_B(x)$ være de karakteristiske polynomier for henholdsvis A og B. Hvis B er similar til A, så eksisterer der en nonsingular matrix S sådan at $B = S^{-1}AS$. Derved gælder der:

$$\begin{aligned} p_B(x) &= det(B - \lambda I) \\ &= det(S^{-1}AS - \lambda I) \\ &= det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= det(S^{-1})det(A - \lambda I)det(S) \\ &= p_A(x) \end{aligned}$$

Egenværdier af en matrix er røderne af det karakteristiske polynomium. Siden de to matricer har samme karakteristiske polynomium, så har de også samme egenværdier.

□

Def. Diagonaliserbar

En $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar, hvis der findes en nonsingular matrix $\underline{\underline{X}}$ således at:

$$\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{D}}$$

Hvor $\underline{\underline{D}}$ er en diagonalmatrix bestående af $\underline{\underline{A}}$'s egenværdier og $\underline{\underline{X}}$ diagonaliserer $\underline{\underline{A}}$ og har $\underline{\underline{A}}$'s egenvektorer som søjlevektorer.

Thr. Theorem 6.3.2

En $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar hvis og kun hvis den har n lineært uafhængige egenvektorer.

Bevis. Theorem 6.3.2

Lad $\underline{\underline{A}}$ have n lineært uafhængige egenvektorer $(\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n)$ med tilhørende egenværdier $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, således vektor $\underline{x}_i$ hører til egenværdi λ_i. Lad så $\underline{\underline{X}}$ være matricen hvis j'te søjlevektor er $\underline{x}_j$ for $j = 1, ..., n$. Det følger så heraf, at $\underline{\underline{A}}\underline{x}_j = \lambda_j \underline{x}_j$ er søjlevektoren for $\underline{\underline{AX}}$. Derved får vi:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{AX}} &= (\underline{\underline{A}}\underline{x}_1, \underline{\underline{A}}\underline{x}_2, ..., \underline{\underline{A}}\underline{x}_n) \\
&= (\lambda_1\underline{x}_1, \lambda_2\underline{x}_2, ..., \lambda_n\underline{x}_n) \\
&= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \underline{\underline{XD}}
\end{aligned}$$

Siden $\underline{\underline{X}}$ har n lineært uafhængige søjlevektorer, så følger det at $\underline{\underline{X}}$ er nonsingulær hvorved der gælder:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{XD}} = \underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{AX}}$$

Lad os så forestille os $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar. Så eksisterer der en nonsingulær matrix $\underline{\underline{X}}$ sådan at $\underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{XD}}$. Hvis $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ er søjlevektorer af $\underline{\underline{X}}$, så følger der:

$$\underline{\underline{A}}\underline{x}_j = \lambda_j \underline{x}_j \quad (\lambda_j = d_{jj})$$

for ethvert j. Derved, for ethvert j er λ_j en egenværdi for $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{x}_j$ er en egenvektor tilhørende egenværdien λ_j. Siden søjlevektorne af $\underline{\underline{X}}$ er lineært uafhængige, så følger det at $\underline{\underline{A}}$ har n lineært uafhængige egenvektorer.

$\square$

8 Diagonalisering

8.1 Disposition

1. Egenværdi og egenvektor
2. Similaritet
3. Theorem 6.1.1
4. Diagonalmatrix
5. Diagonaliserbar
6. Theorem 6.3.2

8.2 Udspecificering

Def. Egenværdi og egenvektor

Lad $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F})$. En skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ er en egenværdi *(også kaldet karakteristisk værdi)* for matricen $\underline{\underline{A}}$ hvis den opfylder:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

Hvor vektoren $\underline{x}$ kaldes egenvektoren tilhørende egenværdien λ og egenvektoren ikke er nulvektoren $\underline{0}$

En egenværdi har adskillige tilknyttede egenvektorer, men en egenvektor har altid kun en egenværdi. En egenvektor gange en skalar er f.eks. stadig en egenvektor til samme egenværdi.
Komplekse egenværdier opstår altid i konjugerede par, således at hvis $\lambda = a + bi$ er en egenværdi for A, så er den konjugerede af λ ligeledes en egenværdi for A.

Def. Similaritet

To $n \times n$ matricer B og A siges at være similarer hvis der eksisterer en nonsingular matrix S således at $B = S^{-1}AS$.
Similaritet betyder bl.a. at similare matricer har samme rank, determinant, karakteristiske polynomium mm.

Thr. Theorem 6.1.1

Lad A og B være $n \times n$ matricer. Hvis B er similar til A, så har de to matricer samme karakteristiske polynomium og derved også samme egenværdier.

Bevis. Theorem 6.1.1

Lad $p_A(x)$ og $p_B(x)$ være de karakteristiske polynomier for henholdsvis A og B. Hvis B er similar til A, så eksisterer der en nonsingular matrix S sådan at $B = S^{-1}AS$. Derved gælder der:

$$\begin{aligned} p_B(x) &= det(B - \lambda I) \\ &= det(S^{-1}AS - \lambda I) \\ &= det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= det(S^{-1})det(A - \lambda I)det(S) \\ &= p_A(x) \end{aligned}$$

Egenværdier af en matrix er røderne af det karakteristiske polynomium. Siden de to matricer har samme karakteristiske polynomium, så har de også samme egenværdier.

$\square$

Def. Diagonalmatrix

En diagonalmatrix er en matrix hvor:

$$\underline{\underline{A}}_{n\times n} = \begin{cases} a_{ij} & \text{for } i = j, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

En diagonalmatrix er meget nemmere at arbejde med, da det at udregne A^2 f.eks. pludselig blot er at tage diagonalindgangene i anden og at $det(A)$ blot er produktet af diagonalens elementer.
Det er dog ikke alle matricer der er diagonaliserbare.

Def. Diagonaliserbar

En $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar, hvis der findes en nonsingular matrix $\underline{\underline{X}}$ således at:

$$\underline{\underline{X}}^{-1}\underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{D}}$$

Hvor $\underline{\underline{D}}$ er en diagonalmatrix bestående af $\underline{\underline{A}}$'s egenværdier og $\underline{\underline{X}}$ diagonaliserer $\underline{\underline{A}}$ og har $\underline{\underline{A}}$'s egenvektorer som søjlevektorer.

Thr. Theorem 6.3.2

En $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar hvis og kun hvis den har n lineært uafhængige egenvektorer.

Bevis. Theorem 6.3.2

Lad $\underline{\underline{A}}$ have n lineært uafhængige egenvektorer $(\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n)$ med tilhørende egenværdier $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, således vektor $\underline{x}_i$ hører til egenværdi λ_i. Lad så $\underline{\underline{X}}$ være matricen hvis j'te søjlevektor er $\underline{x}_j$ for $j = 1, ..., n$. Det følger så heraf, at $\underline{\underline{A}}\underline{x}_j = \lambda_j \underline{x}_j$ er søjlevektoren for $\underline{\underline{AX}}$. Derved får vi:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{AX}} &= (\underline{\underline{A}}\underline{x}_1, \underline{\underline{A}}\underline{x}_2, ..., \underline{\underline{A}}\underline{x}_n) \\
&= (\lambda_1 \underline{x}_1, \lambda_2 \underline{x}_2, ..., \lambda_n \underline{x}_n) \\
&= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & ... & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \underline{\underline{XD}}
\end{aligned}$$

Siden $\underline{\underline{X}}$ har n lineært uafhængige søjlevektorer, så følger det at $\underline{\underline{X}}$ er nonsingulær hvorved der gælder:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{X}}^{-1} \underline{\underline{XD}} = \underline{\underline{X}}^{-1} \underline{\underline{AX}}$$

Lad os så forestille os $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar. Så eksisterer der en nonsingulær matrix $\underline{\underline{X}}$ sådan at $\underline{\underline{AX}} = \underline{\underline{XD}}$. Hvis $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ er søjlevektorer af $\underline{\underline{X}}$, så følger der:

$$\underline{\underline{A}}\underline{x}_j = \lambda_j \underline{x}_j \quad (\lambda_j = d_{jj})$$

for ethvert j. Derved, for ethvert j er λ_j en egenværdi for $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{x}_j$ er en egenvektor tilhørende egenværdien λ_j. Siden søjlevektorne af $\underline{\underline{X}}$ er lineært uafhængige, så følger det at $\underline{\underline{A}}$ har n lineært uafhængige egenvektorer.

□

9 Indre produkt

9.1 Disposition

1. Indre produkt
2. Norm og ortogonalitet
3. Theorem 5.4.1
4. Theorem 5.4.2

9.2 Udspecificering

Def. Indre produkt

Et indre produkt på vektorrummet V er en operation på V der tildeler et reelt tal til ethvert par af vektorer $\underline{x}$ og $\underline{y}$. Det indre produkt skrives således:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

Der gælder følgende regler:

I. $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ med lighed hvis og kun hvis $\underline{x} = \underline{0}$

II. $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ for alle $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i V.

III. $\langle \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}, \underline{z} \rangle = \alpha\langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \beta\langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$ for alle $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ i V og alle skalarer α og β.

Et vektorrum V med et indre produkt kaldes et indre produktrum.
Som eksempel har $\mathbb{R}^n$ det indre produkt defineret som $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{y}^T \underline{x}$.
Det indre produkt for de komplekse tal er defineret som:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i$$

Desuden gælder der for $\mathbb{C}^n$ at: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
$\mathbb{C}^n$ har det indre produkt defineret som $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{y}^H \underline{x}$.

Def. Norm og ortogonalitet

Hvis $\underline{v}$ er en vektor i et indre produktrum V, så er dennes længde, aka. norm, givet ved:

$$||\underline{v}|| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

To vektorer v og u siges at være ortogonale såfremt $\langle v, u \rangle = 0$

Thr. Theorem 5.4.1
(Pythagoras) Hvis u og v er ortogonale vektorer i et indre produktrum V, så gælder der:

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Bevis. Theorem 5.4.1
Vi skriver blot udtrykket foroven op og splitter det op:

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 \end{aligned}$$

Altså gælder Pythagoras' lov for et givent indre produktrum.

□

Thr. Theorem 5.4.2
Hvis u og v er tilfældige vektorer i et indre produktrum V, så gælder der:

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u||||v||$$

Hvor lighed finder sted hvis og kun hvis u og v er lineært afhængige.

Lemma. Egenskaber for projektionsvektorer $u, v \in V$ og p er projektionen af u på v.

1. $u - p$ og p er ortogonale
2. $u = p$ hvis og kun hvis $u = \alpha v$

Bevis. Theorem 5.4.2
Hvis $v = 0$, så er det trivielt at se, at:

$$|\langle u,v\rangle| = 0 = ||u||||v||$$

Hvis $v \neq 0$, så lader vi i stedet p være en vektorprojektion af u på v. Siden p er ortogonal til $u - p$, så følger det af Pythagoras at:

$$||p||^2 + ||u-p||^2 = ||u||^2$$

Derved får vi:

$$\frac{(\langle u, v\rangle)^2}{||v||^2} = ||p||^2 = ||u||^2 - ||u-p||^2$$

og derved bliver dette:

$$(\langle u, v\rangle)^2 = ||u||^2||v||^2 - ||u-p||^2||v||^2 \leq ||u||^2||v||^2$$

Hvorved vi til sidst får:

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

Hvor lighed kun er gældende når $u = p$ og det følger der af lemmaet, at ligheden gælder hvis $v = 0$ eller $u = \alpha v$ - altså hvis u og v er lineært afhængige.

$\square$

10 Ortogonalt komplement og projektion

10.1 Disposition

1. Ortogonalt komplement
2. Theorem 5.2.4
3. Korollar 5.5.9
4. Projektionsmatrice
5. Bevis for unikhed

10.2 Udspecificering

Def. Ortogonalt komplement

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$. Sættet af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ som er ortogonale på alle vektorer i W kaldes det ortogonale komplement af W og skrives $W^\perp$.

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in W\}$$

Dette medfører desuden:

(i) $W^\perp$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

(ii) $dim(W^\perp) = n - dim(W)$.

(iii) $(W^\perp)^\perp$ - hvilket betyder det ortogonale komplement af $W^\perp$ er W.

(iv) Enhver vektor b i $\mathbb{R}^n$ kan blive udtrykt unikt ved $b = b_w + b_{w_\perp}$ for b_w i W og $b_{w_\perp}$ i $W^\perp$.

Disse egenskaber benævnes uden bevis.

Thr. Theorem 5.2.4

Hvis S er et underrum af R^n, så er $(S^\perp)^\perp = S$.

Bevis. Theorem 5.2.4

Hvis $x \in S$, så er x ortogonal til hver y i $S^\perp$. Derfor er $x \in (S^\perp)^\perp$ og derved er $S \subset (S^\perp)^\perp$. På den anden side, forestil dig z er et arbitrært element af $(S^\perp)^\perp$. Fordi $R^n = S \oplus S^\perp$, så kan vi skrive z som en sum $u + v$, hvor $u \in S$ og $v \in S^\perp$. Siden $v \in S^\perp$ er ortogonal i forhold til både u og z. Så følger det at:

$$0 = v^T z = v^T u + v^T v = v^T v$$

og derved er $v = 0$. Så $z = u \in S$ og derved er $S = (S^\perp)^\perp$. $\square$

Thr. Korollar 5.5.9
Lad S være et ikke-nul underrum af $\mathbb{R}^m$ og lad $b \in \mathbb{R}^m$. Hvis $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ er en ortonormal basis for S og $U = (u_1, u_2, ..., u_k)$, så er projektionen p af b på S givet ved:

$$p = UU^T b$$

Bevis. Korollar 5.5.9
Det følger af et andet Theorem (5.5.8), at en given projektion p af b på S er givet ved:

$$p = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_k u_k = Uc$$

Hvor:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T b \\ u_2^T b \\ \vdots \\ u_k^T b \end{bmatrix} = U^T b$$

Derved har vi:

$$p = UU^T b$$

$\square$

Def. Projektionsmatrix
Matricen UU^T i Korollar 5.5.9 er en projektionsmatrix til et underrum S af R^m. For at projektere en given vektor $b \in R^m$ på S behøver vi blot finde en ortonormal basis $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ for S, forme matricen UU^T og gange den med b. For enhver projektion af b på S er denne projektionsmatrix unik.

Bevis. Bevis for unikhed

Hvis $\underline{\underline{P}}$ er en projektionsmatrice tilhørende et underrum S af R^m, så er projektionen $\underline{p}$ af $\underline{b}$ på S unik.
Hvis $\underline{\underline{Q}}$ også er en projektionsmatrice tilhørende S, så er:

$$\underline{\underline{Q}}\underline{b} = \underline{p} = \underline{\underline{P}}\underline{b}$$

Det følger heraf at:

$$\underline{q}_j = \underline{\underline{Q}}\underline{e}_j = \underline{\underline{P}}\underline{e}_j\underline{p}_j$$

$\square$

11 Ortogonale og ortonormale baser

11.1 Disposition

1. Ortogonalt sæt
2. Basis
3. Ortonormalt sæt
4. Theorem 5.5.1
5. Theorem 5.5.2

11.2 Udspecificering

Def. Ortogonalt sæt

Et sæt af vektorer $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er ortogonale såfremt:

$$\langle \underline{v}_j, \underline{v}_i \rangle = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

Et sådant sæt er en basis hvis det opfylder definitionen for en basis, altså:

Def. Basis

Sættet $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er en basis for V hvis disse er indbyrdes lineært uafhængige og spanner V.

Def. Ortonormalt sæt

Et sæt af vektorer $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er ortonormalt hvis:

(i) Sættet er ortogonalt

(ii) Sættet består af enhedsvektorer aka. er normeret:

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Thr. Theorem 5.5.1

Hvis $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ er et ortogonalt set af ikke-nul vektorer i et indre produktrum V, så er $v_1, v_2, ..., v_n$ lineært uafhængige.

Bevis. Theorem 5.5.1
Lad os forestille os $v_1, v_2, ..., v_n$ er ortogonale ikke-nul vektorer og:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$$

Hvis $1 \leq j \leq n$ så ved at tage det indre produkt af v_j på begge sider af udregningen fås:

$$c_1\langle v_j, v_1\rangle + c_2\langle v_j, v_2\rangle + ... + c_n\langle v_j, v_n\rangle = 0$$

$$c_j||v_j||^2 = 0$$

Og derved må alle skalarer $c_1, c_2, ..., c_n$ være 0 - altså er $v_1, v_2, ...v_n$ lineært uafhængige.

□

Thr. Theorem 5.5.2
Lad $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ være en ortonormal basis for et indre produktrum V. Hvis der så gælder:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i$$

Så er $c_i = \langle v, u_i\rangle$.

Bevis. Theorem 5.5.2
Vi udregner egentlig blot $\langle v, u_i\rangle$:

$$\langle v, u_i\rangle = \langle\sum_{j=1}^{n} c_ju_j, u_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j\langle u_j, u_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j\delta_{ji} = c_i$$

□

12 Ortogonale og unitære matricer

12.1 Disposition

1. Ortonormalt sæt
2. Ortogonalmatrix
3. Theorem 5.5.5
4. Unitær matrix
5. Hermitisk matrix
6. Schurs theorem
7. Spektralsætningen

12.2 Udspecificering

Def. Ortonormalt sæt
Et sæt af vektorer $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}\}$ er ortonormalt hvis:

(i) Sættet er ortogonalt
(ii) Sættet består af enhedsvektorer aka. er normeret:

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Def. Ortogonalmatrix
En matrix $Q_{n\times n}$ er en ortogonalmatrix, såfremt dens søjlevektorer udgører et ortonormalt sæt i $\mathbb{R}^n$.
Der gælder for en ortogonalmatrix $\underline{\underline{A}}$ at $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$.
Det gælder desuden at $||Qx||^2 = ||x||^2$, og at $\langle Qx, Qy \rangle = (Qy)^T(Qx) = y^T Q^T Q x = \langle x, y \rangle$.

Thr. Theorem 5.5.5
En $n \times n$ matrix $\underline{\underline{Q}}$ er en ortogonalmatrix hvis og kun hvis $\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$

Bevis. Theorem 5.5.5
Definitionen giver, at en $n \times n$ matrix er ortogonal hvis og kun hvis søjlevektorerne opfylder:

$$\underline{q}_i^T \underline{q}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j, \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

Således er $\underline{\underline{Q}}$ ortogonal hvis og kun hvis $\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$.

$\square$

Def. Unitære matricer

En matrix $U_{n\times n}$ er en unitær matrix såfremt dens søjlevektorer udgør et ortonormalt sæt i $\mathbb{C}^n$.
Således gælder der, at en matrice udelukkende er unitær såfremt der gælder at: $U^H U = I$.

Def. Hemitisk matricer

Lad $M = (m_{ij})$ være en $m\times n$ matrix med komplekse indgange. Matricen M siges at være hermitisk såfremt matricen konjugeret og transponeret er lig sig selv. Vi skriver dette som $M = M^H$.
På denne måde er en hermitisk matrice det samme som en reel symmetrisk matrice.
Der gælder desuden at egenværdierne af en hermitisk matrice alle er reele.

Thr. Schurs theorem

For enhver $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$, eksisterer der en unitær $n \times n$ matrix $\underline{\underline{U}}$, således at $\underline{\underline{U}}^H\underline{\underline{AU}}$ er øvre triangulær

Bevis. Schurs theorem

Vi beviser Schurs theorem vha. induktion i n.

$\underline{n = 1}$
At det gælder for $n = 1$ er trivielt, da en 1×1 matrix allerede pr. definition er triangulær og det derfor er pænt nemt at finde en unitær matrice der sørger for den bliver ved med at være det.

$\underline{Induktionshypotese}$
Som induktionshypotese antager vi at påstanden gælder for $k \times k$.

$\underline{n = k + 1}$
Vi definerer A som værende en $k + 1 \times k + 1$ matrix, hvor λ_1 er en egenværdi og w_1 er en tilhørende enhedsegenvektor.
Vha. Gram-Schmidt konstrueres en ortonormal basis for C^{k+1} bestående af vektorerne $\{w_1, w_2, ..., w_{k+1}\}$.
Hvis W så er en matrice med dette sæt som søjlevektorer, så er W unitær.
Den første søjle i $W^H AW$ er så:

$$W^H Aw_1 = \lambda_1 W^H w_1 = \lambda_1 e_1$$

Derved har matricen $W^H AW$ formen:

$$W^H AW = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & \dots & x \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Hvor M er en $k \times k$ matrix. Vha. induktionshypotesen ved vi der findes en unitær $k \times k$ matrix V_1 således at $V_1^H MV_1 = T_1$ er øvre triangulær. Vi danner så V:

$$V = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & V_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Som så er unitær og:

$$\begin{aligned} V^H W^H AWV &= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & \dots & x \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & V_1^H MV_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & \dots & x \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \\ &= T \end{aligned}$$

Som så er øvre triangulær. Vi lader så nu $U = WV$. Da er U så unitær siden:

$$U^H U = (WV)^H WV = V^H W^H WV = I$$

Og $U^H AU = T$ $\square$

Note. Schur decomposition

Faktoriseringen $A = UTU^H$ bliver ofte kaldt Schur decompositionen af A.

Thr. Spektralsætningen

Hvis A er hermitisk, så eksisterer der en unitær matrix U der diagonaliserer A.

Bevis. Spektralsætningen

Vha. Theorem 6.4.3 ved vi der eksisterer en unitær matrix U således at $U^H AU = T$, hvor T er øvre diagonal. Det følger derfor:

$$T^H = (U^H AU)^H = U^H A^H U = U^H AU = T$$

Altså er T hermitisk og må derved også være diagonal.

□

13 Unitær diagonalisering

13.1 Disposition

1. Hermitisk matrix
2. Unitær matrix
3. Schurs theorem
4. Spektralsætningen

13.2 Udspecificering

Def. Hemitisk matricer

Lad $M = (m_{ij})$ være en $m \times n$ matrix med komplekse indgange. Matricen M siges at være hermitisk såfremt matricen konjugeret og transponeret er lig sig selv. Vi skriver dette som $M = M^H$.
På denne måde er en hermitisk matrice det samme som en reel symmetrisk matrice.
Der gælder desuden at egenværdierne af en hermitisk matrice alle er reele.

Def. Unitære matricer

En matrix $U_{n \times n}$ er en unitær matrix såfremt dens søjlevektorer udgør et ortonormalt sæt i $\mathbb{C}^n$.
Således gælder der, at en matrice udelukkende er unitær såfremt der gælder at: $U^H U = I$.

Thr. Schurs theorem

For enhver $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$, eksisterer der en unitær $n \times n$ matrix $\underline{\underline{U}}$, således at $\underline{\underline{U}}^H \underline{\underline{AU}}$ er øvre triangulær

Bevis. Schurs theorem

Vi beviser Schurs theorem vha. induktion i n.

$\underline{n = 1}$
At det gælder for $n = 1$ er trivielt, da en 1×1 matrix allerede pr. definition er triangulær og det derfor er pænt nemt at finde en unitær matrice der sørger for den bliver ved med at være det.

$\underline{\textit{Induktionshypotese}}$
Som induktionshypotese antager vi at påstanden gælder for $k \times k$.

$\underline{n = k + 1}$
Vi definerer A som værende en $k + 1 \times k + 1$ matrix, hvor λ_1 er en

egenværdi og w_1 er en tilhørende enhedsegenvektor.
Vha. Gram-Schmidt konstrueres en ortonormal basis for C^{k+1} bestående af vektorerne $\{w_1, w_2, ..., w_{k+1}\}$.
Hvis W så er en matrice med dette sæt som søjlevektorer, så er W unitær.
Den første søjle i $W^H AW$ er så:

$$W^H A w_1 = \lambda_1 W^H w_1 = \lambda_1 e_1$$

Derved har matricen $W^H AW$ formen:

$$W^H AW = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & \dots & x \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Hvor M er en $k \times k$ matrix. Vha. induktionshypotesen ved vi der findes en unitær $k \times k$ matrix V_1 således at $V_1^H M V_1 = T_1$ er øvre triangulær.
Vi danner så V:

$$V = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & V_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Som så er unitær og:

$$\begin{aligned} V^H W^H AWV &= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & \dots & x \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & V_1^H M V_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & \dots & x \\ \hline & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \\ &= T \end{aligned}$$

Som så er øvre triangulær. Vi lader så nu $U = WV$. Da er U så unitær siden:

$$U^H U = (WV)^H WV = V^H W^H WV = I$$

Og $U^H AU = T$ $\square$

Note. Schur decomposition
Faktoriseringen $A = UTU^H$ bliver ofte kaldt Schur decompositionen af A.

Thr. Spektralsætningen
Hvis A er hermitisk, så eksisterer der en unitær matrix U der diagonaliserer A.

Bevis. Spektralsætningen
Vha. Theorem 6.4.3 ved vi der eksisterer en unitær matrix U således at $U^H AU = T$, hvor T er øvre diagonal. Det følger derfor:

$$T^H = (U^H AU)^H = U^H A^H U = U^H AU = T$$

Altså er T hermitisk og må derved også være diagonal.

$\square$

14 Kvadratiske former

14.1 Disposition

1. Kvadratiske former
2. Grafen for en kvadratisk form
3. Theorem 6.6.1
4. Definit
5. Theorem 6.6.2

14.2 Udspecificering

Def. Kvadratiske former af 2 variable
En kvadratisk ligning i 2 variable er på form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$$

eller på matrixformen:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Lad:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Da er den kvadratiske form tilhørende den første ligning:

$$x^T Ax = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

OBS: Kvadratiske former kan selvfølgelig sagtens generaliseres til n variable, dog er det ikke noget vi vil give os i kast med.

Note. Grafen for en kvadratisk form
Grafen for en kvadratisk form kaldes en konisk sektion og har følgende,

såkaldte, "standard" former:

$$\text{Cirkel: } x^2 + y^2 = r^2$$
$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$
$$\text{Hyperbel: } \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ el. } \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$
$$\text{Parabel: } x^2 = ay \text{ el. } y^2 = ax$$

Koefficienter kan så bruges til at skubbe horizontalt og vertikalt, og så rotation af grafen.

Thr. Theorem 6.6.1

Principal Axis Theorem Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en symmetrisk $n \times n$ matrix, så kan man skifte varible:

$$\underline{u} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{x}$$

Således at:

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{u}^T \underline{\underline{D}} \underline{u}$$

Hvor $\underline{\underline{D}}$ er en diagonal matrix.

Bevis. Theorem 6.6.1

I det $\underline{\underline{A}}$ er symmetrisk giver korrolar 6.4.5 at der eksisterer en ortogonalmatrix $\underline{\underline{Q}}$ der diagonaliserer $\underline{\underline{A}}$, således at $\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{D}}$. Hvis vi så sætter $\underline{u} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{x}$, så får vi $\underline{x} = \underline{\underline{Q}} \underline{u}$ og:

$$\underline{x}^T \underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{u}^T \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{Q}} \underline{u} = \underline{u}^T \underline{\underline{D}} \underline{u}$$

□

Def. Definit

For en kvadratisk form $f(x) = x^T Ax$, så er den definit hvis $f(x)$ ikke skifter fortegn når x varierer over $\mathbb{R}^n$!
Lad $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ og være symmetrisk. Da er den:

Positiv definit : $f(x) > 0$

Negativ definit : $f(x) < 0$

Positiv semidefinit : $f(x) \geq 0$

Negativ semidefinit : $f(x) \leq 0$

Indefinit : Hvis fortegnet skifter (aka. $f(x)$ er ikke definit)

Hvorvidt en given matrix A er positiv, negativ eller in-definit kan bestemmes ud fra dens egenværdier.

Thr. Theorem 6.6.2
Lad A være en symmetrisk $n \times n$ matrix. Så er A positiv definit hvis og kun hvis alle dens egenværdier er positive.

Bevis. Theorem 6.6.2
Hvis A er positiv definit og λ er en egenværdi til A, så for enhver egenvektor x tilhørende λ gælder der:

$$x^T A x = \lambda x^T x = \lambda ||x||^2$$

Derved har vi:

$$\lambda = \frac{x^T A x}{||x||^2} > 0$$

Lad os forestille os alle egenværdier af A er positive. Lad så $\{x_1, ..., x_n\}$ være et ortonormalt sæt af egenvektorer af A. Hvis x er enhver ikke-nul vektor i $\mathbb{R}^n$, så kan x skrives på formen:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

hvor der gælder:

$$\alpha_i = x^T x_i \quad \text{for } i = 1, ..., n$$

og:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2 = ||x||^2 > 0$$

Det følger heraf:

$$\begin{aligned}
x^T A x &= (\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)^T (\alpha_1 \lambda_1 x_1 + ... + \alpha_n \lambda_n x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2 \lambda_i \\
&\geq (min \lambda_i) ||x||^2 > 0
\end{aligned}$$

Ergo er A positiv definit.

$\square$

15 Lineære differentialligninger

15.1 Disposition

1. Lineært differentialligningssystem
2. Bevis for løsningsform
3. Bevis for linearkombinationløsning
4. Højere ordenssystemer

15.2 Udspecificering

Def. Lineært differentialligningssystem
Lineære differentialligningssystemer er defineres som:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n
\end{aligned}
$$

Hvor $y_i = f_i(t)$ er en funktion i $C[a, b] \forall i$.

Eller skrevet på matrixform:

$$Y' = AY$$

hvor:

$$
\begin{aligned}
Y' &= \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
Y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Def. Løsningsform

For $n = 1$ kender vi løsningen som:

$$y' = ay \Rightarrow y(t) = ce^{at}$$

Indfører vi i stedet for generel løsning for $n > 1$, så får vi:

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ x_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = e^{\lambda t} x$$

Bevis. Bevis for løsningsform

For at se om det er en løsning finder vi $Y' = \lambda e^{\lambda t} x = \lambda Y$.
Hvis vi vælger λ til at være en egenværdi for A og x den tilhørende egenvektor, så får vi:

$$AY = e^{\lambda t} Ax = \lambda e^{\lambda t} x = \lambda Y = Y'$$

Altså er det en løsning.

□

Def. Lineærkombination er også en løsning

Hvis Y_1 og Y_2 begge er løsninger til $Y' = AY$, så er lineærkombinationen af disse også en løsning.

Bevis. Bevis for lineærkombinationen

Vi kan nemt bevise dette ved blot at lave nogle udregninger.:

$$\begin{aligned}(\alpha Y_1 + \beta Y_2)' &= \alpha Y_1' + \beta Y_2' \\ &= \alpha A Y_1 + \beta A Y_2 \\ &= A(\alpha Y_1 + \beta Y_2)\end{aligned}$$

Altså er lineærkombinationen af løsninger også en løsning.

□

Note. Komplekse egenværdier

Lad $\lambda \in \mathbb{C}$ være en kompleks egenværdi til $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ der repræsenterer et lineært differentialligningssystem og lad x være en tilhørende egenvektor. x kan da splittes op i en reel og en imaginer del:

$$x = \begin{bmatrix} Re(x_1) + iIm(x_1) \\ \vdots \\ Re(x_n) + iIm(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re(x_1) \\ \vdots \\ Re(x_n) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} Im(x_1) \\ \vdots \\ Im(x_n) \end{bmatrix} = Re(x) + iIm(x)$$

Def. Højere ordenssystemer
Lad et højere ordenssystem være givet ved:

$$Y'' = A_1Y_1 + A_2Y_2'$$

Da det er besværligt at arbejde med, kan vi gøre til et første ordens system ved at sætte:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_1' \\ Y_{n+2} &= Y_2' \\ &\vdots \\ Y_{2n} &= Y_n' \end{aligned}$$

Hvis vi lader $Y_1 = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ og $Y_2 = Y' = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$. Så har vi:

$$\begin{aligned} Y_1' &= 0Y_1 + 1Y_2 \\ Y_2' &= A_1Y_1 + A_2Y_2 \end{aligned}$$

Og på matrixform:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Såfremt $Y_1(0) = Y(0)$ og $Y_2(0) = Y'(0)$ er givet har systemet en unik løsning. Et problem i denne form kaldes et initial value problem.

16 Stokastiske Matricer

16.1 Disposition

1. Stokastisk proces
2. Stokastiske matrice
3. Markov Kæde
4. Theorem 6.3.3
5. Dominant egenværdi
6. Theorem 6.3.4

16.2 Udspecificering

Def. Stokastisk proces

En stokastisk proces er en sekvens af eksperimenter, for hvilke udfaldet på ethvert stadie afhænger af sandsynlighed.
En Markov Proces er en stokastisk proces der opfylder:

1. Sættet af mulige udfald på ethvert stadie er endeligt.
2. Sandsynligheden for det næste udfald/stadie afhænger udelukkende af det foregående stadie
3. Sandsynlighederne er konstante over tid

Def. Stokastisk matrix

Sandsynlighederne i en stokastisk proces beskrives i en transitionsmatrice, der for enhver tilstand T_i bestemmer hvordan forholdene vil være i tilstand T_{i+1}.
En sådan transitionsmatrix kaldes en stokastisk matrix såfremt der dens søjlevektorer består af sandsynlighedsvektorer - altså at hver søjle har en sum på 1 og alle indgange er ikke negative.

Def. Markov Kæde

En Markov Kæde består således af en række state-vektorer $x_0, ..., x_n$, hvor x_0 kaldes vores initielle vektor og består af forholdet mellem objekter i starten af kæden.
Man kan bestemme fremtidige state-vektorer ved at udregne:

$$x_n = A^n x_0 \quad \text{for } n = 1, 2, ...$$

Men det er nemmere at bruge egenværdierne og egenvektorerne af A til at bestemme fremtidsstadier af markov kæden. Hvis man kan diagonalisere A, således:

$$A = YDY^{-1}$$

Så kan state vektorerne findes ved at udregne:

$$x_n = YD^nY^{-1}x_0$$

En Markov Kæde vil ofte, men ikke altid, konvergere mod en steady-state vektor.

Thr. Theorem 6.3.3
Hvis en Markov kæde med en $n \times n$ transitionsmatrix A konvergerer mod en steady-state vektor x, så gælder der:

(i) x er en sandsynlighedsvektor

(ii) $\lambda_1 = 1$ er en egenværdi til A og x er en egenvektor tilhørende λ_1.

Bevis. Theorem 6.3.3
Vi beviser kun del 1.:

Bevis af (i)

Lad os opskrive den k'te state-vektor i kæden som $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})^T$. Værdierne i x_k er således ikke-negative og summerer op til 1. For ethvert j, der opfylder den j'te indgang af grænsevektoren x:

$$x_j = \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} \geq 0$$

og..:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \lim_{k\to\infty} (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) = 1.$$

Altså er steady-state vektoren x en sandsynlighedsvektor.

□

Note. Dominant egenværdi
Markov kæder konvergerer ikke altid mod en steady-state vektor. Men hvis transitionsmatricen A har $\lambda_1 = 1$ *dominant egenværdi*, så er det garanteret markov kæden konvergerer mod en steady state vektor x.

En egenværdi λ_1 siges at være dominant, hvis der for alle andre egenværdier til A gælder:

$$|\lambda_j| < |\lambda_1| \quad \text{for } j = 2, 3, ..., n$$

Thr. Theorem 6.3.4
Hvis $\lambda_1 = 1$ er en dominant egenværdi af en stokastisk matrice A, så vil Markovkæden med transitionsmatrix A konvergerer mod en steady-state vektor.

Bevis. Theorem 6.3.4
I det tilfælde at A er diagonaliserbar, lad y_1 være en egenvektor tilhørende $\lambda_1 = 1$ og lad $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ være en matrix der diagonaliserer A. Hvis E er en $n \times n$ matrix hvis $(1, 1)$ indgang er 1 og hvis tilbageværende indgange alle er 0, så gælder der at når $k \to \infty$:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \vdots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \vdots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = E$$

Hvis x_0 er enhver initial sandsynlighedsvektor og $c = Y^{-1}x_0$, så har vi:

$$x_k = A^k x_0 = Y D^k Y^{-1} x_0 = Y D^k c \to Y E c = Y(c_1 e_1) = c_1 y_1$$

Altså er $c_1 y_1$ steady-state vektoren for Markovkæden.
I tilfælde af transitionsmatrixen A er defektiv (kan ikke diagonaliseres), med dominant egenværdi $\lambda_1 = 1$, så kan man stadig bevise sætningen vha. andre mekanismer der ligger udenfor pensum.

□